Appunti sui radicali[1]

prof. Enrico Centenaro[2]

$\boxed{\sqrt[n]{a}}$: RADICALE

a: RADICANDO

n: INDICE DELLA RADICE

$\sqrt{\ }$: SEGNO DELLA RADICE

Radice n-esima aritmetica: dato un numero reale maggiore o uguale a zero a e un numero naturale non nullo n, si dice radice n-esima di a quel numero che elevato alla n da come risultato a.

Esempio: $\sqrt[4]{10000} = 10$ perché $10^4 = 10000$; $\sqrt[3]{125} = 5$ perché $5^3 = 125$; $\sqrt[2]{49} = 7$ perché $7^2 = 49$.

ATTENZIONE: Nelle radici aritmetiche il radicando si suppone sempre positivo.

Proprietà invariantiva: il radicale aritmetico non cambia se si moltiplicano indice ed esponente del radicando per uno stesso numero naturale non nullo. In formula $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$.

Esempio: $\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[4]{2^6}$; $\sqrt[15]{3^3} = \sqrt[5]{3}$.

Radicale irriducibile: è un radicale in cui indice e l'esponente del radicando sono primi fra loro (non si possono "semplificare").

Esempio: $\sqrt[3]{3^4}$ è irriducibile; $\sqrt[6]{5^1 2}$ non lo è.

Semplificare un radicale: trasformarlo in un radicale irriducibile applicando la proprietà invariantiva.

Esempio: $\sqrt[12]{5^8} = \sqrt[3]{5^2}$

ATTENZIONE: Se il radicando è letterale è necessario imporre sempre la sua positività con l'uso dei valori assoulti.

Esempio: $\sqrt[4]{x^2 - 6xy + 9y^2} = \sqrt[4]{(x-3y)^2} = \sqrt{|x-3y|}$

Operazioni con i radicali

Moltiplicazione: se i radicali hanno lo stesso indice il risultato è un radicale che mantiene l'indice e ha come radicando il prodotto dei radicandi. **Esempio:** $\sqrt[3]{15}\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{15\,25\,3\,24} = \sqrt[3]{27000} = 30$; $\sqrt{9\,16\,49} = \sqrt{9}\sqrt{16}\sqrt{49} = 3\,2\,7 = 84$

ATTENZIONE: Se i radicali non hanno lo stesso indice bisogna trasformarli in modo che lo abbiano.

Divisione: vedi la moltiblicazione, inoltre il divisore non deve essere nullo.

Esempio: $\sqrt{56} : \sqrt{14} = \sqrt{56:14}$; $\sqrt[3]{3375:27} = \sqrt[3]{3375} : \sqrt[3]{27} = 15 : 3 = 5$

Trasporto di un fattore sotto la radice: per portare sotto radice un fattore positivo occorre elevarlo ad una potenza uguale all'indice della radice.

Esempio: $3\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4\,5} = \sqrt[4]{405}$ $-2\sqrt[3]{7} = -\sqrt[3]{2^3\,7}\sqrt[3]{8\,7}\sqrt[3]{56}$

Trasporto di un fattore fuori dalla radice: Se nell radicando vi è un fattore positivo con esponente maggiore o uguale all'indice della radice, è possibile trasportare suori quel fattore dalla radice in questo modo: fuori dalla radice resta una potenza con esponente uguale al quoziente fra l'esponente e l'indice, sotto la radice resta una potenza con esponente il resto della divisione.

Esempio: $\sqrt[3]{4^6} = 4^{6/3}\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[5]{3^9} = \sqrt[5]{3^5\,3^4} = \surd 5\sqrt[5]{4}$; $\sqrt{27\,a^5\,x^2} = \sqrt{3^3\,a^4\,a\,x^2} = 3\,a^2\,|x|\sqrt{3a}$

Potenza: per elevare ad una potenza un radicale basta elevare a quella potenza il radicando, viceversa per estrarre una radice ad una potenza basta estrarla alla base.

Esempio: $(\sqrt[3]{7})^2 = \sqrt[3]{7^2}$; $(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4} = 5^2$; $\sqrt[5]{32^6} = (\sqrt[5]{32})^6 = 2^6 = 64$

Estrazione di radice: la radice n-esima di una radice m-esima è una radice nm-esima. In formula: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,m]{a}$

Esempio: $\sqrt[3]{\sqrt{13}} = \sqrt[6]{13}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{14}}} = \sqrt[60]{14}$

Radicali simili: due o più radicali sono simili quando hanno lo stesso indice e lo stesso radicando ed eventualmente differiscono per un *fattore moltiplicativo* che viene chiamato *coefficiente del radicale*.

Esempio: $3\sqrt[3]{4x}$, $-4\sqrt[3]{4x}$ sono simili.

Addizione e sottrazione = somma algebrica: i radicali i possono sommare algebricamente rispettando le stesse regole valide per la somma algebrica dei monomi simili:

Esempio: $\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

Espresione con radicali: si dice di una espressione nella quale figurano operazioni sui radicali (si applicano le regole già imparate in aggiunta a quelle relative ai radicali).

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

- Il denominatore è un radicale quadratico irriducibile: $\frac{a}{\sqrt{b}}$ si moltiplicano numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$, l'espressione

[1] Tratto da: MateSup quaderno 2 Modern School

[2] enrico@matematiche.org (12 Gennaio 2003)

si semplifica nel seguente modo:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

- il denominatore è la somma o la differenza di due terminidi cui almento uno è un radicale quadratico ($\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$), in questo nao si moltiblicano numeratore e denominatore per la stessa espressione : $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ (attenzione all'ordine dei segni!) e si semplifica nel seguente modod:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} &= \frac{n\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)} = \\ &= \frac{n\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a-b} \end{aligned}$$

Radicale doppio: espressione della forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Condizioni: $a > 0; b > 0; a^2 - b > 0$. La trasformazione conviene solo quando $a^2 - b$ è un quadrato perfetto.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Potenze con esponente frazionario: una potenza con esponente frazionario poitivo $\frac{m}{n}$ di un numero reale non negativo a è un radicale che ha come indice il denominatore n e come radicando il numero a elevato al numeratore m della frazione:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \;\; a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$$

Radicali algebrici: la radice n-esima algebrica di un numero relativo a "$\sqrt[n]{a}$" è se esitono l'insieme di numeri relativi che soddisfano l'uguaglianza $x^n = a$. e n è pari ce ne sono due x e $-x$, se n è dispari è unica.

Esempio: La radice quadrata algebrica di 4 è ± 2; mentre la cubica di -8 è -2.

Esercizi semplici

1. Riduci i seguenti radicali allo stesso indice: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{15}$; $\sqrt[5]{24}$; $\sqrt[4]{19}$
2. Trasporta otto il segno di radice: $3\sqrt[3]{\frac{5}{81}}$
3. Trasporta fuori dal segno di radice: $2\sqrt[3]{x^8y^16z^9}$
4. Razionalizza i seguenti denominatori: $\frac{2}{\sqrt[2]{5}}$; $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; $\frac{3}{\sqrt{x^2+6}+x}$
5. Trasforma i seguenti radicali doppi nella somma di due radicali semplici: $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; $\sqrt{x+xy-\sqrt{4x^2y}}$
6. Radici algebriche: $\sqrt[4]{+81}$; $\sqrt[5]{-32}$

Esercizi un po' più complessi

1. Semplifica i seguenti radicali:
   $\sqrt[12]{3^{24}\left(\frac{5}{3}\right)^{12}}$; [15]
   $\sqrt[4]{\frac{16(a+b)^8}{x^{16}}}$; $[\frac{2(a+b)^2}{x}]$
   $\sqrt[4]{1-\frac{2x-1}{x^2}}$; $[\sqrt{\left|\frac{x-1}{x}\right|}]$
2. Completa le seguenti uguaglianze utilizzando la proprietà invariantiva:
   $\sqrt{5} = \sqrt[4]{\ldots}$; $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{\ldots}$; $\frac{1}{2}x^4 = \sqrt{\ldots}$
3. Esegui le seguenti operazioni:
   $\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a^5}\sqrt{3}$;
   $\sqrt[3]{\frac{x(x-y)}{a}}\sqrt[4]{\frac{a^2(x-y)}{x}} : \left(\sqrt[6]{\frac{x-y}{a^2x}} : \sqrt[4]{\frac{x-y}{a^2x}}\right)$
4. Porta sotto radice il fattore eterno:
   $2\sqrt[3]{5}$; $3/2\sqrt[3]{16/9}$; $(a+1/b)\sqrt[5]{b^3/(ab+1)^4}$
5. Porta suori dalla radice i fattori posibili:
   $\sqrt{72;\ \sqrt[3]{54};\ \sqrt[5]{64a^5+32a^7}}$; $\sqrt{a/b+b/a+2}$
6. Esegui le potenze indicate:
   $(2\sqrt{3})^3$; $(\sqrt[10]{3x})^5$; $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2$
7. Scrivi come unico radicale le seguenti espressioni:
   $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$; $\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^36}}}$
8. Risolvi le espressioni seguenti:
   $\sqrt[4]{\sqrt{23}} - \sqrt{7}\sqrt[4]{\sqrt{23}} + \sqrt{7} - \sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$
   $\sqrt{a-b} + b\sqrt{a}/\sqrt{a^2-ab}$
9. Razionalizza le frazioni:
   $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}$; $(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{x^2y})/\sqrt[3]{xy}$; $\frac{a}{a+\sqrt{a}}$
10. Trasforma i radicali doppi semplici:
    $\sqrt{11-\sqrt{57}}$; $\sqrt{21-3\sqrt{13}}$
11. Scrivi sotto forma di radicali le seguenti potenze:
    $7^{2/3}$; $(3/7)^{3/2}$; $(3/4)^{-1/2}$
12. Scrivi sotto forma di potenze i radicali:
    $\sqrt[5]{2^3}$; $\sqrt[3]{a+b}$; $\sqrt[7]{a^3(a^2+5b^2)^2}$; $\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$
13. Calcola i seguenti radicali algebrici.
    $\sqrt{81}$; $\sqrt[4]{625}$; $\sqrt[3]{-216}$; $\sqrt[3]{27a^6b^9}$